

POLITECNICO DI MILANO



MECCANICA DEI FLUIDI

10. FLUSSI ESTERNI

A cura di: DIEGO BERZI

v1.0

Indice

1	Introduzione	3
2	Fenomenologia	4
3	Equazioni di strato limite	10
4	Drag e Lift	14
4.1	Drag	15
4.1.1	Corpi affusolati	16
4.1.2	Corpi tozzi	20
4.1.3	Effetti della comprimibilità	25
4.2	Lift	27
4.3	Modellazione fisica	30
5	Altri tipi di interazione	32

1 Introduzione

Ci siamo, finora, limitati ad applicare le equazioni che governano la Dinamica dei fluidi Newtoniani a casi di **flussi interni**, in cui il fluido in movimento è contornato da superfici solide (è il caso, ad esempio, del moto laminare o turbolento in condotta cilindrica a sezione circolare). Molti problemi di interesse ingegneristico riguardano, però, il caso duale di oggetti solidi investiti da un flusso di fluido Newtoniano che li avvolge completamente (**Flussi Esterni su corpi immersi**). Si pensi, ad esempio, ai mezzi di trasporto (automobili, aerei, sottomarini, imbarcazioni), per i quali occorre valutare in fase di progetto le forze trasmesse dall'aria e/o dall'acqua durante il loro moto.

Le equazioni di Navier-Stokes (Cap. 8) possono, ovviamente, ancora essere utilizzate per determinare il campo di moto e di pressione attorno ad un oggetto solido investito da un flusso esterno di fluido Newtoniano incomprimibile. In generale, la soluzione andrà ancora cercata per via numerica, eventualmente avvalendosi di metodi LES o RANS nel caso di moto turbolento (Cap. 9). Dalla conoscenza del campo di moto e di pressione, si può risalire, come vedremo, alla determinazione della forza esercitata dal fluido sull'oggetto.

Una possibile alternativa è quella di effettuare esperimenti su modelli (Cap. 6), per ricavare la dipendenza della forza che il fluido esercita sull'oggetto (variabile di stato) dai parametri di controllo del problema.

In un caso o nell'altro, risulta fondamentale comprendere quali sono le caratteristiche fenomenologiche del campo di moto che si sviluppa attorno a corpi immersi: per ottenere utili indicazioni che possono guidare nella ricerca della soluzione numerica (come vedremo, sono possibili semplificazioni delle equazioni in certe zone del dominio; allo stesso modo, conviene, in certe zone del dominio, aumentare o diminuire il numero di nodi di griglia); per capire quale fenomeno fisico è responsabile di certi comportamenti rilevati in sede sperimentale.

2 Fenomenologia

Per semplicità, consideriamo il caso in cui un oggetto (corpo) solido dotato di piano di simmetria si muova con una certa velocità, di modulo U , costante nel tempo all'interno di un fluido che si può considerare fermo ad una sufficiente distanza dal corpo. Utilizzando la relatività Galileiana, possiamo metterci in un sistema di riferimento solidale con l'oggetto. In tale sistema di riferimento, l'oggetto risulta fermo ed investito da una corrente fluida avente profilo uniforme di velocità, di modulo pari a U , a monte dell'oggetto. Prendiamo l'asse x parallelo a tale vettore velocità e l'asse y perpendicolare ad esso e contenuto nel piano di simmetria dell'oggetto (trascuriamo la direzione z).

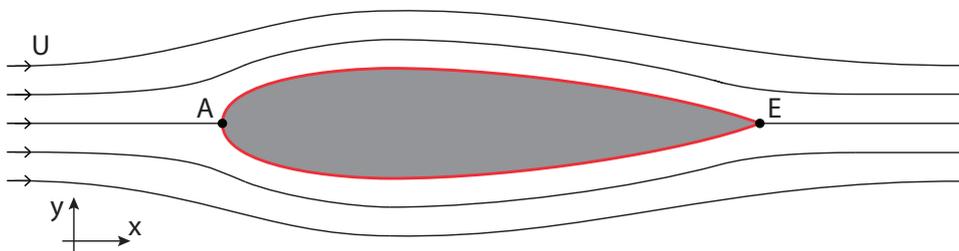


Figura 1: campo di moto di un fluido ideale che investe un profilo alare. I punti di attacco e di uscita sono identificati, rispettivamente, dalle lettere A e E.

Nel caso in cui l'oggetto solido abbia profilo alare e sia investito da una corrente di fluido ideale, il campo di moto, in termini di linee di corrente, è rappresentato in Fig. 1 insieme al sistema di riferimento (si può ricavare risolvendo le equazioni di Eulero, Cap. 5). Le linee di corrente, che sono rette parallele a monte dell'oggetto, curvano in prossimità dello stesso se impenetrabile (le linee di corrente non possono attraversarlo). Se il fluido è ideale, non vale la condizione di aderenza alla parete (la velocità del fluido in corrispondenza della superficie solida non è nulla), per cui esistono linee di corrente che appartengono alla superficie dell'oggetto. Tali linee di corrente divergono da e convergono in un'unica linea di corrente in corrispondenza di punti notevoli che rappresentano singolarità matematiche, in cui la velocità è nulla (**punti di stagnazione**) e la pressione è massima (dal teorema di Bernoulli, visto che lì la velocità è minima). Tali punti, che sono localizzati sulla superficie di monte e di valle dell'oggetto, sono detti, rispettivamente, **punto di attacco** e **punto di uscita** (se ne esistono diversi che appartengono alla stessa curva, si parla di **bordo d'attacco** e **bordo d'uscita**). Una caratteristica interessante del campo di moto di Fig. 1 è che la componente x del vettore velocità del fluido è positiva in ogni punto del dominio (non ci sono zone di inversione di flusso). Possiamo, inoltre, intuire che la velocità

del fluido nella porzione di dominio x occupata dall'oggetto sarà maggiore di quella a monte e a valle dello stesso: la presenza dell'oggetto diminuisce l'area trasversale del flusso. Se il fluido è incomprimibile, la portata volumetrica, calcolata come integrale del vettore velocità sul piano $y - z$, è indipendente dalla coordinata x . Ne consegue che la velocità aumenta, e la pressione diminuisce, laddove l'area di passaggio diminuisce.

Vediamo ora come si modificano le cose nel caso in cui il profilo alare sia investito da una corrente di fluido reale. La condizione di impenetrabilità continua a indurre curvatura nelle linee di corrente. In corrispondenza della superficie dell'oggetto vale, però, la condizione di aderenza, per cui la velocità è nulla (nel sistema di riferimento solidale col corpo solido) e non esistono più linee di corrente appartenenti alla superficie del corpo. Visto che sulla superficie del corpo la velocità è nulla e che, sufficientemente lontano dal corpo, la velocità deve essere pari a U (si dice che lontano dal corpo il flusso è **indisturbato**), deve esistere una zona intorno al corpo all'interno della quale la velocità passa da 0 a U , cioè una zona in cui è presente un gradiente di velocità. Indichiamo con δ lo spessore di tale zona misurato, localmente, lungo la perpendicolare alla superficie del corpo. Nel caso di fluidi reali, a gradienti di velocità sono associati sforzi tangenziali viscosi, per cui δ rappresenta anche lo spessore della zona all'interno della quale non possono essere trascurati gli sforzi viscosi.

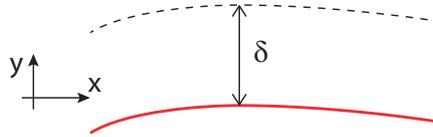


Figura 2: regione in prossimità del corpo all'interno della quale contano gli effetti viscosi.

Possiamo valutare lo spessore δ ricorrendo all'analisi degli ordini di grandezza, nel caso di **corpi affusolati**, cioè corpi solidi per i quali la dimensione in direzione y è molto minore di quella in direzione x . In questo caso, la perpendicolare locale alla superficie del corpo può essere confusa con la direzione y (Fig. 2). Poniamo $x = 0$ in corrispondenza del punto di attacco, e $y = 0$ sulla superficie del corpo. Utilizziamo le equazioni di Navier-Stokes per risolvere il moto all'interno della zona dove non possono essere trascurati gli sforzi viscosi. Usiamo la velocità U , la lunghezza l del corpo affusolato in direzione x e ρU^2 per adimensionalizzare velocità, lunghezze e pressione nelle equazioni di Navier-Stokes (Cap. 8, Par. 2). Al solito, usiamo l'accento anticirconflesso per indicare che la variabile è adimensionale. Nel caso piano considerato, l'equazione di continuità in forma adimensionale si scrive

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (1)$$

dove $\tilde{u} = u/U$ e $\tilde{v} = v/U$ rappresentano le velocità adimensionali del fluido lungo x e y rispettivamente. Dal momento che u è compresa tra 0 e U , $u \sim U$ e, quindi, $\tilde{u} \sim 1$; allo stesso modo, x è compresa tra 0 e l , per cui $x \sim l$ e $\tilde{x} \sim 1$. Sappiamo, invece, che y è compresa tra 0 e δ , per cui $y \sim \delta$ e $\tilde{y} \sim \check{\delta}$. Il primo termine a sinistra nell'Eq.(1) è quindi di ordine 1: $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \sim \frac{\tilde{u}}{\tilde{x}} \sim 1$. Perché valga l'Eq.(1), dovrà, perciò, essere $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \sim \frac{\tilde{v}}{\tilde{y}} \sim 1$, per cui $\tilde{v} \sim \tilde{y} \sim \check{\delta}$. Scriviamo ora l'equazione di bilancio della quantità di moto adimensionale in direzione x :

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad (2)$$

dove le inerzie locali sono nulle perché il moto è stazionario, abbiamo usato l'eccesso di pressione rispetto all'idrostatica, p_e , e $\text{Re} = \frac{\rho U l}{\mu}$ è un numero di Reynolds globale. Se supponiamo che $\delta < l$, risulta $\check{\delta} \sim \tilde{y} < 1$. Per cui risulta anche che $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \sim \frac{\tilde{u}}{\tilde{x}^2} \sim 1 < \frac{\tilde{u}}{\tilde{y}^2} \sim \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$. L'ultimo termine a destra nell'Eq.(2) è, dunque, quello dominante tra i termini viscosi. I termini viscosi nell'equazione indefinita di bilancio della quantità di moto di Navier-Stokes non possono essere trascurati se sono almeno dello stesso ordine di grandezza dei termini inerziali convettivi, cioè se risulta

$$\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \sim \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}. \quad (3)$$

Si verifica facilmente che i termini delle inerzie convettive a sinistra nell'Eq.(3) sono di ordine 1, per cui

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \sim \frac{1}{\text{Re}} \frac{\tilde{u}}{\tilde{y}^2} \sim 1, \quad (4)$$

e, invertendo,

$$\tilde{y} \sim \check{\delta} = \frac{\delta}{l} \sim \text{Re}^{-1/2}, \quad (5)$$

Per numeri di Reynolds di ordine 1, δ e l sono dello stesso ordine di grandezza. All'aumentare del numero di Reynolds, δ/l diminuisce: già per $\text{Re} \sim 10^3$, δ è circa pari al 3% della lunghezza l del corpo affusolato. Quando $\delta \ll l$, la zona adiacente al corpo in cui contano gli effetti viscosi si definisce **strato limite** [1]. L'Eq.(5) ci fornisce un'idea dello spessore dello strato limite in corrispondenza di $x = l$. Considerare un corpo affusolato più corto o più lungo non avrebbe cambiato nulla nell'analisi svolta. Possiamo, allora, semplicemente sostituire x a l nell'Eq.(5), ottenendo

$$\frac{\delta}{x} \sim \text{Re}_x^{-1/2}, \quad (6)$$

dove $Re_x = \frac{\rho U x}{\mu}$ è, questa volta, un numero di Reynolds locale. L'Eq.(5) ci dice che lo spessore $\delta(x)$ dello strato limite aumenta con la radice quadrata della coordinata x (meno che linearmente). In maniera più rigorosa, dovremmo parlare di **strato limite laminare**, visto che al suo interno abbiamo ipotizzato che gli sforzi viscosi siano non trascurabili. Come sappiamo, all'aumentare del numero di Reynolds aumenta la possibilità che piccole perturbazioni evolvano in maniera caotica dando origine al moto turbolento (per effetto dei termini non-lineari nelle equazioni di Navier-Stokes). Esisterà, quindi, un valore critico di Re_x (cioè una distanza critica dal punto di attacco) in corrispondenza del quale avviene la transizione da strato limite laminare a **strato limite turbolento**. Tale valore critico dipenderà dalla geometria del corpo (valori critici tipici sono dell'ordine di 10^5). A causa degli scambi di quantità di moto turbolento, lo spessore dello strato limite aumenta in maniera brusca in corrispondenza della transizione (Fig. 3). In prossimità della superficie del corpo, gli sforzi turbolenti sono comunque nulli, per cui, anche nel caso di strato limite turbolento, esisterà uno **substrato limite viscoso** in cui dominano gli sforzi viscosi.

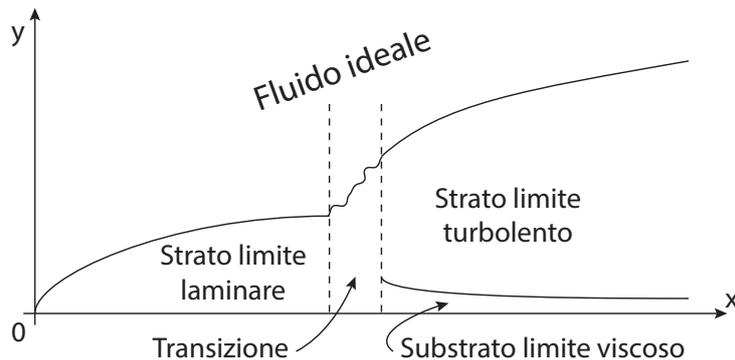


Figura 3: strato limite laminare e turbolento.

Rispetto al caso di fluido ideale, dunque, nel caso di fluido reale che investe un corpo solido (come il profilo alare considerato nel nostro esempio), possiamo distinguere: uno strato limite adiacente al corpo (che può essere interamente laminare o parzialmente laminare e parzialmente turbolento), all'interno del quale gli effetti viscosi sono importanti e valgono le equazioni di Navier-Stokes (o una versione semplificata di esse, come vedremo in seguito); una zona esterna allo strato limite (detta **flusso libero**), dove il fluido può essere considerato ideale (i gradienti di velocità sono trascurabili) e valgono le equazioni di Eulero.

C'è, infine, un'ultima importante differenza tra fluido ideale e fluido reale. In generale, se il fluido è reale, per motivi che chiariremo in seguito, non in tutto il campo di moto la componente x della velocità è positiva.

Esiste una zona a valle del corpo, detta **zona di separazione**, in cui la componente x della velocità è sia positiva che negativa, distinta da quella in cui tale componente è solo positiva, detta **flusso principale**. Nel flusso principale, le linee di corrente sono dirette verso valle, mentre nella zona di separazione sono dirette sia verso monte che verso valle (**ricircolo**). I punti sulla superficie del corpo in corrispondenza dei quali il flusso principale si separa dal corpo stesso (non riesce a stare attaccato al corpo per tutta la sua lunghezza) si chiamano **punti di separazione** o **punti di distacco** (può anche succedere che il flusso principale si stacchi dal corpo per poi riattaccarsi ad esso più a valle; in questo secondo caso, si parla di **riattacco**). Gli spigoli vivi inducono sempre la separazione del flusso principale dal corpo. Anche se non avviene la separazione (per esempio nel caso di lastra piana parallela al flusso), a valle del corpo è quasi sempre presente una zona di flusso disturbato (in cui il campo di moto è diverso da quello uniforme) che si estende per qualche multiplo della lunghezza caratteristica del corpo e che prende il nome di **scia**.

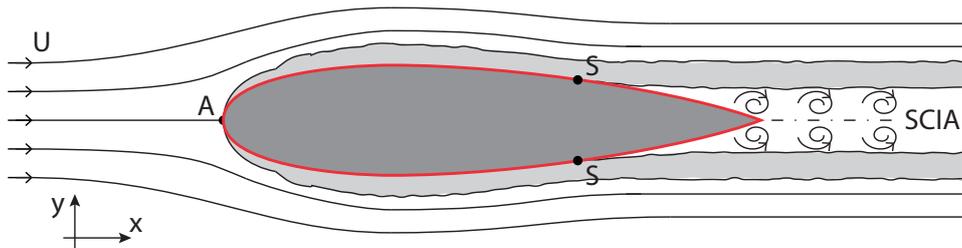


Figura 4: campo di moto di un fluido reale che investe un profilo alare. I punti di attacco e di separazione sono identificati, rispettivamente, dalle lettere A e S. L'area in grigio chiaro rappresenta lo strato limite.

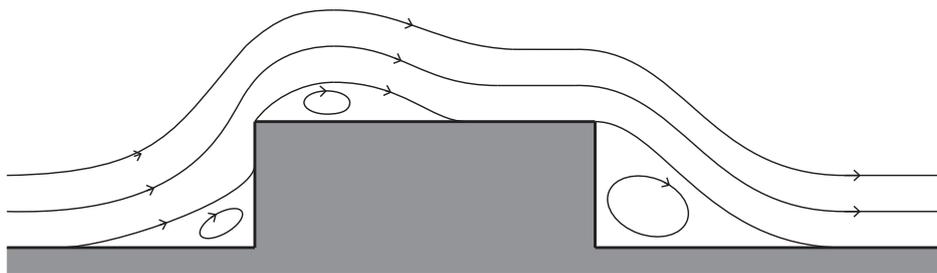


Figura 5: esempio di campo di moto attorno a un edificio basso e allungato investito dal vento.

In Fig. 4 è rappresentato il campo di moto di un fluido reale che investe il profilo alare quando il numero di Reynolds è sufficientemente elevato. Sono evidenti le differenze con il caso di Fig. 1. In Fig. 5 è riportato, a titolo di

esempio, il campo di moto attorno ad un edificio basso ed allungato investito dal vento, in cui sono evidenti i fenomeni di separazione e riattacco del flusso principale (con la formazione di zone di ricircolo).

Vedremo ora come, alla luce della fenomenologia del campo di moto, sia possibile giungere ad una versione semplificata delle equazioni di Navier-Stokes da utilizzare per risolvere problemi fluidodinamici di flussi esterni ad elevato numero di Reynolds.

3 Equazioni di strato limite

Svolgiamo ora, in maniera più dettagliata, un'analisi degli ordini di grandezza dei vari termini che compongono le equazioni di Navier-Stokes all'interno dello strato limite (in maniera analoga a quanto fatto nel caso della lubrificazione, Cap. 8, Par. 3.5). Per semplicità, limitiamo la nostra indagine al caso piano descritto nel Par. 2, in cui x rappresenta la direzione del flusso indisturbato e y la perpendicolare ad esso. Consideriamo, inoltre, costante nel tempo la velocità U del flusso indisturbato a monte dell'oggetto. Infine, consideriamo un corpo affusolato, in cui la normale locale alla superficie del corpo possa confondersi con la y . I risultati concettuali possono comunque essere generalizzati anche al caso di **corpi tozzi**, in cui la dimensione dell'oggetto in direzione y è comparabile o addirittura maggiore di quella in direzione x . Utilizziamo la densità del fluido ρ , la lunghezza l del corpo in direzione x e la velocità U per adimensionalizzare le equazioni di Navier-Stokes e l'eccesso di pressione rispetto all'idrostatica, così da ottenere

$$\begin{aligned}\frac{\partial \check{u}}{\partial \check{x}} + \frac{\partial \check{v}}{\partial \check{y}} &= 0 \\ \check{u} \frac{\partial \check{u}}{\partial \check{x}} + \check{v} \frac{\partial \check{u}}{\partial \check{y}} &= -\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \check{u}}{\partial \check{x}^2} + \frac{\partial^2 \check{u}}{\partial \check{y}^2} \right) \\ \check{u} \frac{\partial \check{v}}{\partial \check{x}} + \check{v} \frac{\partial \check{v}}{\partial \check{y}} &= -\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{y}} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \check{v}}{\partial \check{x}^2} + \frac{\partial^2 \check{v}}{\partial \check{y}^2} \right).\end{aligned}\quad (7)$$

Riscriviamo ora le Eqs. (7) mettendo in evidenza l'ordine di grandezza dei vari termini che le compongono. Notiamo anche che, nel caso di strato limite (cioè per Re abbastanza elevati), δ è piccolo rispetto a l , cioè che $\check{\delta} \ll 1$. Nel Par. 2 abbiamo già mostrato che $\check{u} = \mathcal{O}(1)$, $\check{x} = \mathcal{O}(1)$ e $\check{y} = \mathcal{O}(\check{\delta})$. Abbiamo anche già dimostrato (Eq.(5)) che $\check{\delta} \sim \text{Re}^{-1/2}$ (per strato limite laminare), per cui risulta $1/\text{Re} = \mathcal{O}(\check{\delta}^2)$. Sostituendo gli ordini di grandezza nell'equazione di continuità, otteniamo

$$\frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} + \frac{\mathcal{O}(\check{v})}{\mathcal{O}(\check{\delta})} = 0, \quad (8)$$

che, come già ricavato nel Par. 2, ci dice che $\check{v} = \mathcal{O}(\check{\delta})$. Con questo, le equazioni di bilancio di quantità di moto risultano

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(1) \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} + \mathcal{O}(\check{\delta}) \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(\check{\delta})} &= -\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{x}} + \mathcal{O}(\check{\delta}^2) \left(\frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(1)} + \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(\check{\delta}^2)} \right) \\ \mathcal{O}(1) \frac{\mathcal{O}(\check{\delta})}{\mathcal{O}(1)} + \mathcal{O}(\check{\delta}) \frac{\mathcal{O}(\check{\delta})}{\mathcal{O}(\check{\delta})} &= -\frac{\partial \check{p}_e}{\partial \check{y}} + \mathcal{O}(\check{\delta}^2) \left(\frac{\mathcal{O}(\check{\delta})}{\mathcal{O}(1)} + \frac{\mathcal{O}(\check{\delta})}{\mathcal{O}(\check{\delta}^2)} \right).\end{aligned}\quad (9)$$

Non abbiamo introdotto gli ordini di grandezza per i gradienti delle pressioni perché, al momento, non li conosciamo.

Se possiamo trascurare i termini di ordine δ^2 e δ^3 nelle equazioni, otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0 \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2},\end{aligned}\tag{10}$$

che prendono il nome di **equazioni parabolizzate di Navier-Stokes**. A differenza delle equazioni di Navier-Stokes (Eqs. (7)), che sono ellittiche, le Eqs. (10) sono paraboliche: esiste una direzione preferenziale di integrazione (la direzione x) che ne facilita la soluzione numerica. Questo è dovuto al fatto che sono scomparsi i termini contenenti le derivate seconde rispetto a x .

Se possiamo trascurare anche i termini di ordine δ , otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0 \\ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \\ \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{y}} &= 0,\end{aligned}\tag{11}$$

che prendono il nome di **equazioni di strato limite** [1]. Non solo le equazioni di strato limite sono paraboliche, ma l'eccesso di pressione rispetto all'idrostatica è costante lungo la direzione y . Questo significa che la pressione all'interno dello strato limite è pari a quella in corrispondenza dell'interfaccia con il flusso libero, all'interno del quale valgono le equazioni di Eulero. La strategia per la soluzione di flussi esterni di questo tipo è, quindi, quella di: risolvere il caso di flusso ideale che investe il corpo solido (utilizzando le equazioni di Eulero), ignorando la presenza dello strato limite; utilizzare la distribuzione di pressioni così ottenuta in corrispondenza della superficie del corpo per calcolarsi il gradiente di pressione $\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}}$ da inserire nelle Eqs. (11) e risolvere il campo di moto all'interno dello strato limite; eventualmente, utilizzare le informazioni relative allo strato limite per raffinare la soluzione delle equazioni di Eulero e così via, mediante approssimazioni successive.

È interessante notare che, in corrispondenza della superficie del corpo, dove la velocità del fluido è nulla, l'equazione di bilancio della quantità di moto in direzione x nelle Eqs. (11) diventa, semplicemente,

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}}.\tag{12}$$

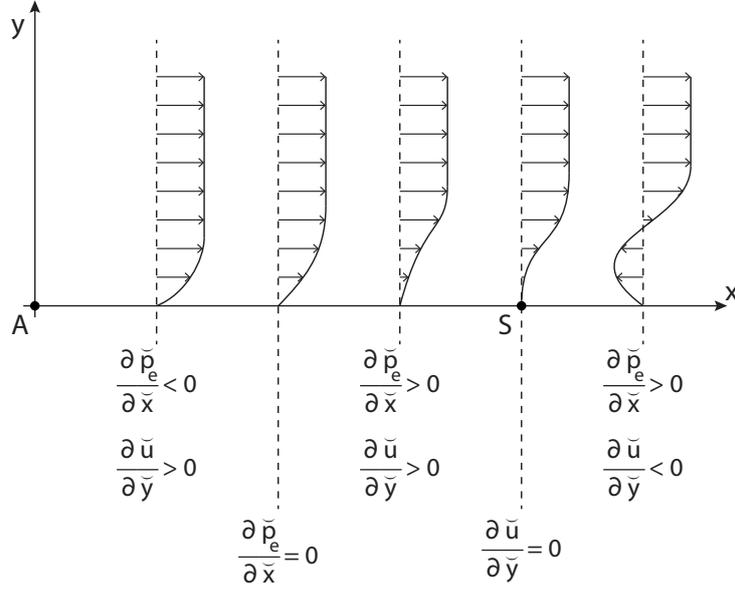


Figura 6: evoluzione del profilo di velocità in prossimità della superficie del corpo a valle del punto di attacco A.

Per ogni posizione x lungo la superficie del corpo, possiamo tracciare il profilo di velocità u lungo la normale alla superficie stessa. L'Eq.(12) lega la curvatura locale del profilo di velocità in corrispondenza della superficie del corpo al gradiente di pressione. Se il gradiente di pressione è favorevole, $\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} < 0$, il profilo di velocità è localmente concavo. Se il gradiente di pressione è avverso, $\frac{\partial \tilde{p}_e}{\partial \tilde{x}} > 0$, il profilo di velocità è localmente convesso. Se il gradiente di pressione è nullo, in corrispondenza della superficie del corpo il profilo di velocità ha un punto di flesso. Tornando al concetto di separazione del flusso principale dal corpo introdotto nel paragrafo precedente, notiamo che a monte e a valle del punto di separazione deve risultare $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} > 0$ e $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} < 0$, rispettivamente (questo assicura che la componente x della velocità in prossimità del corpo sia positiva e negativa, rispettivamente). Il punto di separazione è matematicamente individuato dalla condizione $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = 0$ sulla superficie del corpo. Condizione necessaria perché ci sia un cambio di segno nella derivata prima del profilo di velocità rispetto a y è che ci sia un cambio di segno della derivata seconda rispetto a y . Tale condizione non è sufficiente: la posizione x in cui $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}$ cambia segno non è, infatti, la stessa in cui cambia

il segno di $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}$ (Fig. 6). Condizione necessaria, ma non sufficiente perché avvenga la separazione è, dunque, la presenza di un gradiente di pressione avverso.

4 Drag e Lift

Possiamo ora tornare al problema, tipicamente ingegneristico, di determinare le forze ed i momenti che un flusso esterno esercita su di un corpo immerso. Limitiamo, per semplicità, l'analisi alle forze e notiamo che esse sono dovute al fatto che, localmente, in corrispondenza della porzione di superficie infinitesima del corpo dA , è presente l'eccesso rispetto alla pressione idrostatica p_e e lo sforzo tangenziale viscoso τ_{visc} (gli sforzi turbolenti sono nulli in corrispondenza della superficie del corpo). Una volta individuato l'orientamento della superficie infinitesima rispetto al sistema di riferimento – per esempio attraverso l'angolo θ che la normale alla superficie forma con l'asse x , parallelo alla velocità del flusso indisturbato (Fig. 7) – è possibile calcolare le componenti x e y della forza infinitesima esercitata dal flusso sulla superficie dA (ipotizziamo come in precedenza che il piano $x-y$ sia un piano di simmetria per il corpo, in modo da trascurare la direzione z) come

$$dF_x = (p_e \cos \theta + \tau_{visc} \sin \theta) dA, \quad (13)$$

$$dF_y = (-p_e \sin \theta + \tau_{visc} \cos \theta) dA. \quad (14)$$

La risultante delle forze infinitesime in direzione x (quella parallela al flusso indisturbato), che si ottiene integrando l'Eq.(13) sulla superficie di contorno A del corpo, è

$$D = \int_A p_e \cos \theta dA + \int_A \tau_{visc} \sin \theta dA, \quad (15)$$

e prende il nome di **Drag** (Resistenza). Nell'Eq.(15) abbiamo sfruttato la proprietà distributiva dell'integrale rispetto alla somma per distinguere la componente del drag dovuta alla distribuzione delle pressioni (detta **drag di pressione** o **drag di forma**) da quella dovuta alla distribuzione di sforzi tangenziali (detta **drag d'attrito** o **drag viscoso**).

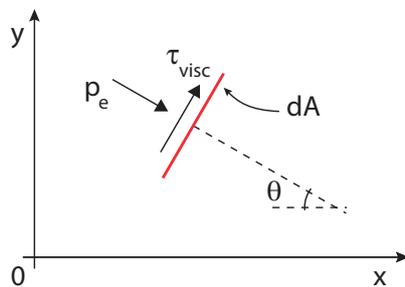


Figura 7: sforzi su una porzione infinitesima di superficie del corpo.

La risultante delle forze infinitesime in direzione y , che si ottiene integrando l'Eq.(14) sulla superficie di contorno A del corpo, è, invece,

$$L = - \int_A p_e \sin \theta dA + \int_A \tau_{visc} \cos \theta dA, \quad (16)$$

e prende il nome di **Lift** (Portanza). Anche in questo caso abbiamo distinto il lift di pressione da quello d'attrito.

Se il piano $x-y$ non fosse un piano di simmetria per il corpo, sarebbe presente una terza componente (in direzione z) della forza che il flusso esercita sul corpo immerso detta **Deviance** (Devianza).

Vale la pena specificare che la risultante della componente idrostatica delle pressioni sulla superficie del corpo (Cap. 8, Par. 1.1),

$$\bar{\mathbf{S}}_A = \int_A p_{stat} \hat{\mathbf{n}} dA = - \int_W \nabla p_{stat} dW = \int_W \rho g \nabla \tilde{z} dW = Mg \nabla \tilde{z}, \quad (17)$$

usando il teorema del gradiente, con W volume del corpo e $M = \int_W \rho dW$ massa del volume di fluido occupato dal corpo, è la **forza di galleggiamento** o **spinta di Archimede** (diretta come la verticale geodetica verso l'alto).

Per determinare drag e lift, è necessario conoscere la geometria del corpo immerso e la distribuzione delle pressioni e degli sforzi tangenziali viscosi in corrispondenza della sua superficie. Una possibilità è quella di risolvere numericamente le equazioni che governano il moto dei fluidi (ad esempio, le equazioni di Eulero nella zona di flusso libero e quelle di strato limite in prossimità del corpo) per determinare i campi di pressione e velocità sulla superficie del corpo immerso (dalla conoscenza del campo di velocità è, infatti, immediato determinare gli sforzi tangenziali viscosi sulla superficie del corpo tramite la legge di Newton). Una seconda possibilità è quella di condurre esperimenti su di un modello fisico (Cap. 6, Par. 3) e misurare: (i) la distribuzione locale di pressioni e sforzi tangenziali sulla superficie del corpo (è semplice misurare le pressioni tramite piezometri, manometri o trasduttori di pressione, mentre gli strumenti di misura degli sforzi tangenziali sono più complessi e delicati e, di solito, si basano indirettamente su misure locali di velocità); (ii) direttamente le forze globali che il flusso esercita sul corpo tramite bilance dinamometriche.

4.1 Drag

Nel caso di fluidi ideali, il drag di attrito è nullo (la viscosità è nulla), ma è nullo anche il drag di pressione. Per rendersi conto di questo, basta pensare che le equazioni di Eulero che governano la dinamica dei fluidi ideali sono equazioni che sono soddisfatte anche se si inverte il flusso (si cambia segno al vettore velocità) mantenendo la stessa distribuzione di pressione. Questo significa che non è possibile, nello schema di fluido ideale, stabilire quale

sia il verso del flusso indisturbato, per cui il fluido ideale non può esercitare forze nella direzione del flusso indisturbato. Questa conclusione prende il nome di **Teorema di D'Alembert** [2].

Nel caso di fluidi reali, in assenza di interfacce tra fluidi a diverso peso specifico (nel qual caso conterebbe l'accelerazione di gravità) e/o non miscibili (nel qual caso potrebbe contare la tensione superficiale), il drag, che rappresenta la variabile di stato, dipende dalla geometria del corpo immerso (forma e dimensione l), dalle proprietà del fluido (densità ρ , viscosità dinamica μ e comprimibilità ϵ), dalla velocità del flusso indisturbato U e dalla scabrezza superficiale \mathcal{R} :

$$D = f(\text{forma}, l, \rho, \mu, \epsilon, U, \mathcal{R}). \quad (18)$$

Se usiamo la terna inerziale (ρ, U, l) per adimensionalizzare il problema (ipotizzando che le inerzie siano rilevanti), otteniamo

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} = f'(\text{forma}, \text{Re}, \text{Ma}, \frac{\mathcal{R}}{l}), \quad (19)$$

dove: C_D è il **coefficiente di drag**, cioè il gruppo Π associato con il drag quando si usa una terna inerziale (il fattore $1/2$ al denominatore è per ragioni storiche); A è l'area di una qualche superficie caratteristica del corpo (ne faremo alcuni esempi in seguito); $\text{Re} = \frac{\rho U l}{\mu}$ è il numero di Reynolds (inverso del gruppo Π associato con la viscosità dinamica); $\text{Ma} = \frac{U}{\sqrt{\epsilon/\rho}}$ è il numero di Mach (radice quadrata dell'inverso del gruppo Π associato con la comprimibilità); $\frac{\mathcal{R}}{l}$ è la scabrezza relativa.

4.1.1 Corpi affusolati

Analizziamo ora come il coefficiente di drag dipende dal numero di Reynolds e dalla scabrezza relativa nel caso di corpi affusolati (ignoriamo, per ora, la dipendenza dal numero di Mach, supponendo di essere in autosimilitudine rispetto ad esso).

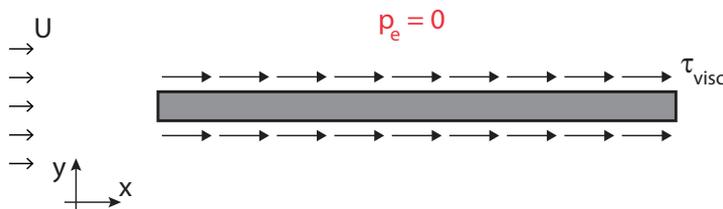


Figura 8: distribuzione degli sforzi su lastra piana parallela al flusso.

Il caso più estremo di corpo affusolato è rappresentato da una lastra piana di lunghezza l parallela al flusso. Tipiche distribuzioni di sforzi sulla lastra investita da una corrente stazionaria avente velocità uniforme U sono rappresentati in Fig. 8. Si può notare che la forza di drag è dovuta ai soli sforzi tangenziali (drag di attrito), mentre il drag di pressione è nullo (l'eccesso di pressione rispetto all'idrostatica è ovunque nullo). L'area che compare nella definizione di coefficiente di drag è l'area della superficie della lastra $A = lb$, dove b è la larghezza della lastra in direzione z .

Quando $Re = (\rho Ul) / \mu < 1$, si parla di **flusso di Stokes**. In tale caso, le inerzie non contano, per cui né la densità del fluido né la scabrezza vanno considerate come variabili di controllo del problema. Nel caso in cui anche la comprimibilità possa essere ignorata, l'Eq.(18) diventa, semplicemente,

$$D = f(\text{forma}, l, \mu, U), \quad (20)$$

e, usando la terna viscosa (μ, U, l) per adimensionalizzare,

$$\frac{D}{\mu Ul} = f''(\text{forma}). \quad (21)$$

Se vogliamo continuare ad utilizzare il coefficiente di drag anche nel caso di flusso di Stokes (impropriamente, visto che il coefficiente di drag è il gruppo Π associato col drag quando si usa una terna inerziale), dall'Eq.(22) e dalla definizione di C_D otteniamo

$$C_D = f''(\text{forma}) \frac{l}{b} \frac{\mu}{\rho Ul} = \frac{f'''(\text{forma})}{Re}, \quad (22)$$

dove il coefficiente f''' tiene anche conto del rapporto tra larghezza e lunghezza della lastra. L'inversa proporzionalità col numero di Reynolds è indice di correlazione spuria (come nel caso della relazione tra indice di scabrezza e numero di Reynolds nel moto laminare in condotta cilindrica a sezione circolare, Cap. 7, Par. 1.1). Il coefficiente di drag sembra dipendere dal numero di Reynolds (e, quindi, dalla densità del fluido) perché abbiamo usato la terna inerziale per adimensionalizzare il drag anche quando la densità del fluido non ha effetto sul problema.

Per $10^3 < Re < 10^5$, si forma uno strato limite laminare in corrispondenza della superficie della lastra, il cui spessore varia con la posizione lungo la lastra in accordo con l'Eq.(6). Essendo laminare, la scabrezza relativa della lastra non influenza il coefficiente di drag, che dipende dal solo numero di Reynolds. Per determinare l'andamento di C_D con Re , notiamo che la legge di Newton ci dice che lo sforzo viscoso sulla lastra è pari a:

$$\tau_{visc} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \frac{\mu U}{\delta} \left. \frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta)} \right|_{y/\delta=0}. \quad (23)$$

Il drag su ciascuna delle superfici laterali della lastra si ottiene integrando l'Eq.(23) moltiplicata per b (larghezza della lastra) tra $x = 0$ (bordo di attacco) e $x = l$ (bordo di uscita):

$$D = \int_0^l \frac{\mu U}{\delta} \frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta)} \Big|_{y/\delta=0} b dx = 2b\mu U \int_0^l \frac{1}{\delta} \frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta)} \Big|_{y/\delta=0} dx. \quad (24)$$

Se ora facciamo l'ipotesi, verificata sperimentalmente, che $\frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$, cioè che la dipendenza della velocità dalla posizione sulla lastra entri solo attraverso la dipendenza dello spessore dello strato limite δ da x (ipotesi di **similitudine dei profili di velocità** [3]), e usiamo l'Eq.(6), l'Eq.(24) diventa

$$D \sim \rho^{1/2} b \mu^{1/2} U^{3/2} \int_0^l x^{-1/2} dx = 2\rho^{1/2} b \mu^{1/2} l^{1/2} U^{3/2}, \quad (25)$$

dove la costante di proporzionalità che deve comparire nell'Eq.(25) è il prodotto tra $\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta)} \Big|_{y/\delta=0}$ e la costante di proporzionalità nell'Eq.(6). Dall'Eq.(25), il coefficiente di drag nel caso di strato limite laminare su lastra piana parallela al flusso risulta, dunque,

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 b l} \sim \left(\frac{\mu}{\rho U l}\right)^{1/2} = \text{Re}^{-1/2}, \quad (26)$$

cioè inversamente proporzionale alla radice quadrata del numero di Reynolds. Per determinare il valore della costante, occorre conoscere il profilo di velocità all'interno dello strato limite. La soluzione esatta è stata ottenuta da Blasius [3] risolvendo le equazioni di strato limite e fornisce $C_D = 1.328 \text{Re}^{-1/2}$.

Quando $\text{Re}_x = (\rho U x) / \mu \approx 5 \cdot 10^5$ (numero di Reynolds critico), avviene la transizione da strato limite laminare a turbolento. Se la porzione di strato limite turbolento è dominante (la posizione $x = x_{cr}$ lungo la lastra in corrispondenza della quale avviene la transizione è prossima al bordo di attacco e, quindi, molto minore di l) e la lastra è liscia, il coefficiente di drag dipende dal solo numero di Reynolds attraverso la legge empirica $C_D = 0.455 / (\log \text{Re})^{2.58}$ [4]. Nella transizione da strato limite laminare a turbolento, il coefficiente di drag aumenta sempre nel caso di lastra piana parallela al flusso. Come già per il caso di moto in condotta (Cap. 7, Par. 1.2), nessuna lastra è in realtà liscia. Può solo essere considerata idraulicamente liscia fintantoché la scabrezza è interamente annegata nel substrato limite viscoso (Cap. 9, Par. 2.4). All'aumentare del numero di Reynolds lo spessore del substrato limite viscoso diminuisce e la scabrezza inizia ad emergere da esso e ad avere influenza sul drag. Per numeri di Reynolds sufficientemente elevati, la scabrezza è emersa totalmente dal substrato limite viscoso e il

problema diventa autosimile rispetto a Re (moto puramente turbolento). In tale situazione, il coefficiente di drag è solo funzione della scabrezza relativa ed, empiricamente, si ottiene $C_D = [1.89 - 1.62 \log(\mathcal{R}/l)]^{-2.5}$ [4]. Quando lo strato limite è turbolento e contano sia il numero di Reynolds che la scabrezza relativa, si ottengono curve di raccordo tra la curva delle lastre lisce e le curve delle lastre scabre del tutto simili a quelle che, nell'arpa di Nikuradse – per scabrezza omogenea – o nell'abaco di Moody – per scabrezza disomogenea – descrivono l'andamento dell'indice di resistenza in moto turbolento di transizione (Cap. 7, Par. 1.2.3).

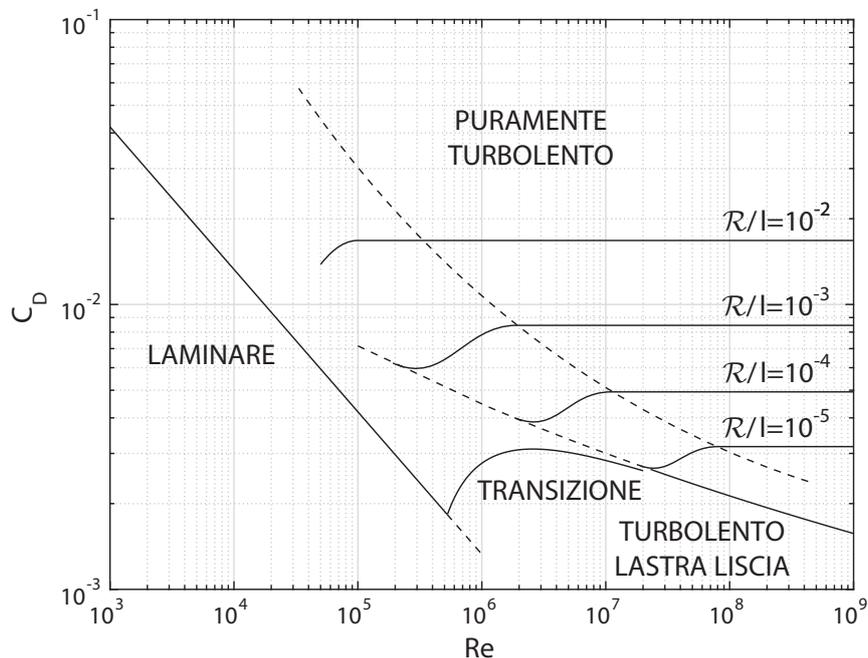


Figura 9: coefficiente di drag in funzione del numero di Reynolds e della scabrezza relativa nel caso di lastra piana parallela al flusso.

In Fig. 9 viene riportato l'andamento complessivo del coefficiente di drag su lastra piana parallela al flusso col numero di Reynolds per diversi valori di scabrezza relativa omogenea e vengono messi in evidenza i vari regimi di moto appena descritti.

Nel caso di un generico corpo affusolato, il drag di pressione non è nullo a causa della separazione, per ragioni che spiegheremo meglio in seguito, ma il drag di attrito è comunque significativo. L'andamento qualitativo del coefficiente di drag col numero di Reynolds e la scabrezza relativa è lo stesso del caso della lastra piana parallela al flusso.

4.1.2 Corpi tozzi

Occupiamoci ora della dipendenza del coefficiente di drag dal numero di Reynolds e dalla scabrezza relativa nel caso di corpi tozzi.

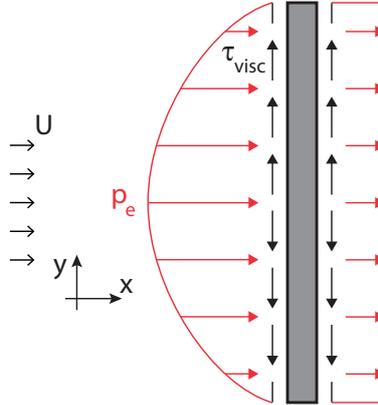


Figura 10: distribuzione degli sforzi su lastra piana perpendicolare al flusso.

Il caso più estremo di corpo tozzo è rappresentato da una lastra piana posta perpendicolare al flusso. Tipiche distribuzioni degli sforzi sulla lastra investita da una corrente sono rappresentati in Fig. 10. Si nota subito che, a valle della lastra, il flusso si è separato, a causa della presenza di spigoli vivi. Nella zona di separazione (scia) la pressione è circa uniforme e può assumere valori negativi. La forza di drag è, in questo caso, dovuta solamente alle pressioni (drag di pressione), mentre il drag di attrito è nullo (gli sforzi tangenziali alla superficie della lastra non contribuiscono alla forza in direzione x). Il drag di pressione è associato con l'asimmetria nella distribuzione di pressione tra superficie di monte e di valle della lastra, a sua volta indotta dalla separazione del flusso. È questa una considerazione del tutto generale per corpi tozzi: il drag è in massima parte drag di pressione, generato da una mancata simmetria nella distribuzione delle pressioni tra monte e valle del corpo, a sua volta associata con la separazione del flusso e la conseguente creazione di una zona di scia. Come detto in precedenza, la velocità è massima e, quindi, la pressione è minima in corrispondenza del massimo ingombro del corpo: questo significa che, a monte della sezione di massimo ingombro, il gradiente di pressione in direzione x è favorevole (negativo, la pressione diminuisce con x), mentre a valle è avverso (positivo, la pressione aumenta con x). Ricordando che la presenza di un gradiente di pressione avverso è condizione necessaria perché avvenga la separazione, si capisce perché essa è la norma nel caso di corpi tozzi. Dal momento che il drag per i corpi tozzi è, principalmente, drag di pressione, nella definizione di coefficiente di drag si utilizza, di solito, l'area frontale, cioè la proiezione della superficie del corpo sul piano $y - z$.

Prendiamo come esempio di corpo tozzo una sfera di diametro d investita da una corrente stazionaria e uniforme con velocità U .

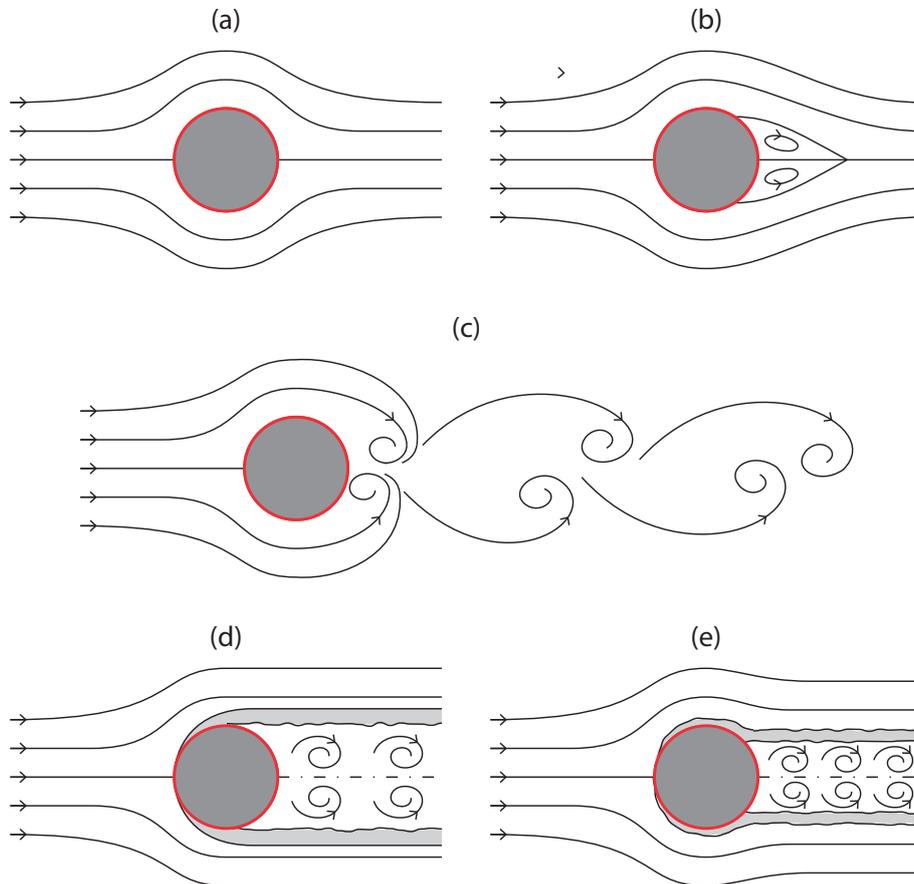


Figura 11: campo di moto attorno a una sfera: (a) flusso di Stokes; (b) bolle stazionarie; (c) scia di Kármán; (d) presenza di strato limite laminare; (e) presenza di strato limite turbolento.

Quando $Re = (\rho U d) / \mu < 1$, si parla ancora di flusso di Stokes. Anche nel caso di corpi tozzi il coefficiente di drag risulta inversamente proporzionale al numero di Reynolds (correlazione spuria) e la costante di proporzionalità dipende dalla forma del corpo tozzo (per esempio, vale 24 nel caso della sfera). Nel caso di flusso di Stokes non si verifica la separazione (Fig. 11a).

Aumentando il numero di Reynolds ($1 < Re < 50$), il flusso si separa dal corpo e si formano a valle del corpo due vortici a delta simmetrici e stazionari (**bolle stazionarie**) (Fig. 11b). I punti di separazione si muovono progressivamente verso monte con l'aumentare del numero di Reynolds.

Per $50 < Re < 10^3$, si forma la cosiddetta **scia vorticoso oscillante di Kármán** [5]. Tale fenomeno consiste della formazione alternata di vortici

contro-rotanti a valle del corpo in corrispondenza del quadrante superiore e inferiore, che successivamente vengono trasportati verso valle per convezione allineandosi in direzione x (Fig. 11c). Sono spettacolari le manifestazioni della scia di Kármán in ambito atmosferico (Fig. 12).



Figura 12: vortici atmosferici vicino all'isola di Guadalupe (NASA, <https://images.nasa.gov/#/details-PIA02635.html>).

Per $10^3 < Re < 10^5$, attorno al corpo è presente strato limite laminare che si separa dalla sfera più o meno in corrispondenza della sezione di massimo ingombro (Fig. 11d). A valle del corpo è presente una scia turbolenta, all'interno della quale la pressione si mantiene circa uniforme (e minore della pressione in corrispondenza del punto di stagnazione a monte). Per via della separazione, vi è un mancato recupero (deficit) di pressione a valle del corpo, come è evidente se si disegna la pressione sulla superficie del corpo in funzione dell'angolo al centro θ (con $\theta = 0^\circ$ in corrispondenza del punto di attacco e θ che aumenta in senso orario) e la si confronta col caso di fluido ideale (Fig. 13). Tale mancato recupero di pressione è fisicamente analogo al ciclista che percorre verso valle, senza pedalare, il versante di una collina per poi risalire sul versante opposto: nel momento in cui si ferma, il ciclista si troverà ad un'altitudine inferiore a quella di partenza per via degli attriti. Dal momento che il punto di separazione non si sposta col numero di Reynolds, nel caso di strato limite laminare, il deficit di pressione tra monte e valle, in forma adimensionale, rimane lo stesso e il coefficiente di drag è circa costante (pari a circa 0.5 nel caso della sfera).

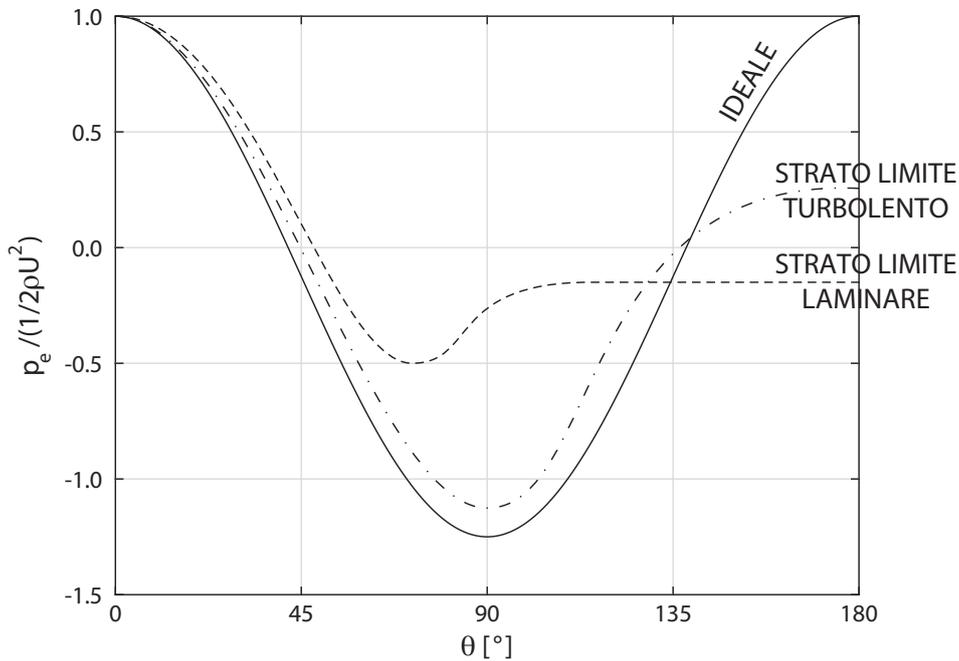


Figura 13: andamento della pressione sulla superficie della sfera in funzione dell'angolo al centro nel caso di flusso ideale e nel caso di flusso reale in presenza di strato limite.

Quando $Re \approx 10^5$, vi è transizione da strato limite laminare a turbolento. Lo strato limite turbolento possiede più inerzia di quello laminare, per cui riesce a stare più attaccato al corpo: la separazione avviene più a valle rispetto allo strato limite laminare e la scia turbolenta si restringe (Fig. 11e). Ne consegue che il deficit di pressione tra monte e valle si riduce (Fig. 13) e diminuisce il drag di pressione. Il drag di attrito aumenta quando lo strato limite passa da laminare a turbolento, ma tale aumento non compensa la diminuzione del drag di pressione: complessivamente, il coefficiente di drag diminuisce (al contrario di quello che accade per corpi affusolati). Se la sfera è liscia, aumentando ulteriormente il numero di Reynolds, il drag di attrito, adimensionale, aumenta, mentre quello di pressione, adimensionale, rimane invariato: il coefficiente di drag aumenta con Re . Se la sfera è scabra, la transizione da strato limite laminare a turbolento avviene per valori inferiori del numero di Reynolds, con un valore minimo del coefficiente di drag maggiore di quello per sfera liscia. Una volta avvenuta la transizione, il coefficiente di drag aumenta col numero di Reynolds fino a saturare quando la scabrezza è interamente emersa dal substrato limite viscoso: C_D diventa autosimile rispetto a Re (moto puramente turbolento).

In Fig. 14 viene riportato l'andamento complessivo del coefficiente di drag col numero di Reynolds per una sfera liscia e vengono messi in evi-

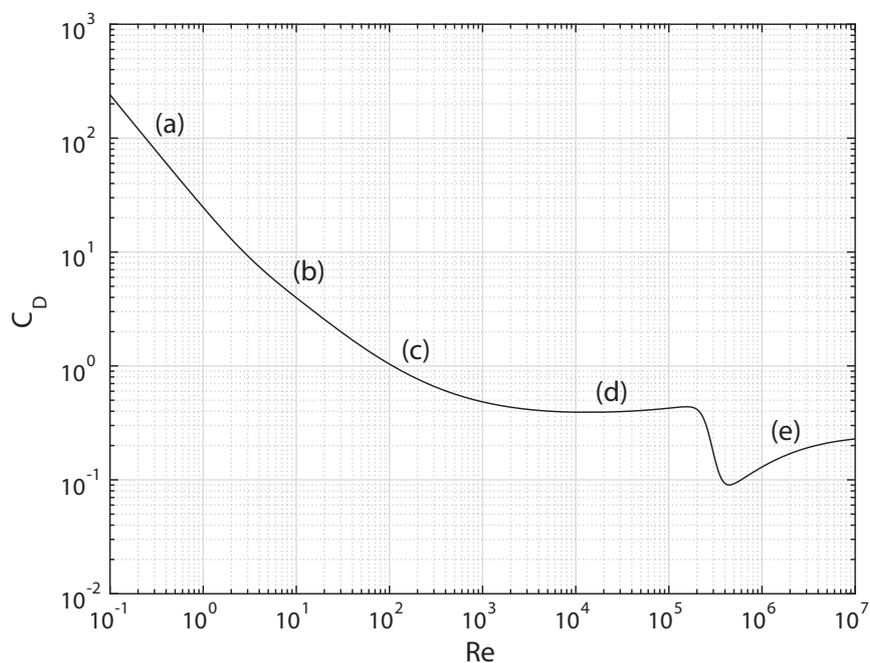


Figura 14: coefficiente di drag in funzione del numero di Reynolds nel caso di sfera liscia (interpolazione dei dati sperimentali [6]). Le lettere corrispondono ai regimi di moto di Fig. 11.

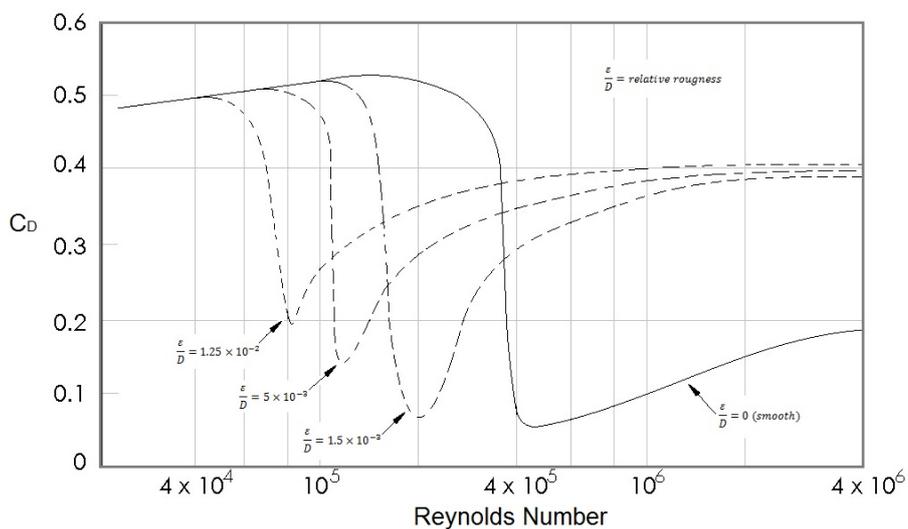


Figura 15: coefficiente di drag in funzione del numero di Reynolds per sfere a diversa scabrezza relativa nei dintorni della transizione da strato limite laminare a turbolento (adattato da [7, 8]).

denza i vari regimi di moto appena descritti. L'influenza della scabrezza relativa \mathcal{R}/d è, invece, evidenziata in Fig. 15. È possibile notare che esiste un range di numeri di Reynolds, attorno a $10^4 \div 10^5$, in corrispondenza del quale una sfera scabra è caratterizzata da minore resistenza fluidodinamica di una sfera liscia (per la differenza nelle caratteristiche della scia). Tale fenomeno, apparentemente contro intuitivo, è sfruttato, per esempio, in ambito sportivo: le palle da tennis sono ricoperte da feltro per aumentarne la scabrezza, causare la transizione laminare-turbolenta nello strato limite e diminuire il drag, aumentando la velocità di gioco; analogamente, le palle da golf sono ricoperte di fossette (che hanno anche un altro effetto cui accenneremo in seguito). Proprio per evitare eccessive velocità, che renderebbero il gioco impraticabile, le palline da ping pong sono, al contrario, lisce (e hanno massa piccola, in modo da incrementare, a parità di forza resistente, la decelerazione).

L'andamento del coefficiente di drag col numero di Reynolds e la scabrezza relativa per un generico corpo tozzo è qualitativamente simile a quanto appena descritto per la sfera.

4.1.3 Effetti della comprimibilità

Analizziamo ora quali sono le conseguenze della comprimibilità del fluido sul drag. Supponendo di essere in un range di numeri di Reynolds per i quali Re non ha effetto sul problema (per esempio nella zona in cui lo strato limite è puramente turbolento per corpi affusolati e tozzi, o la zona di strato limite laminare per corpi tozzi), il tipico andamento del coefficiente di drag col numero di Mach è illustrato in Fig. 16. Si nota come il coefficiente di drag è indipendente dal numero di Mach (autosimilarità) quando questo è inferiore a 0.3 (come nel caso di moto in condotta, Cap. 7, Par. 1.3).

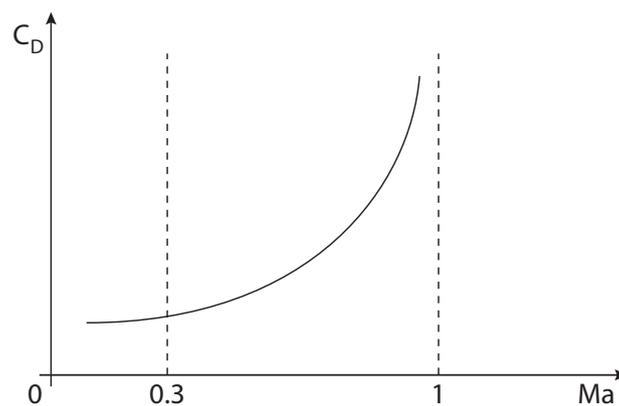


Figura 16: andamento del coefficiente di drag in funzione del numero di Mach per flussi subsonici.

Nei dintorni di $Ma = 1$ (valore che distingue i flussi subsonici da quelli supersonici), cioè nella regione transonica, il coefficiente di drag aumenta drammaticamente (anche di un ordine di grandezza), a causa della formazione di onde di shock nella zona a monte del corpo che influenzano la separazione del flusso e la presenza di gradienti avversi di pressione (**drag d'onda**). Per lungo tempo si è pensato che il valore $Ma = 1$ fosse perciò invalicabile (da cui l'espressione **muro del suono**). Sono state proposte trasformazioni matematiche per risolvere alcuni problemi di flussi comprimibili attraverso metodi numerici adatti a flussi incomprimibili, assumendo che il drag fosse infinito in corrispondenza di $Ma = 1$ [9]. In realtà, il coefficiente di drag è finito quando $Ma = 1$ e, anzi, continua ad aumentare fino a circa $Ma = 1.2$.

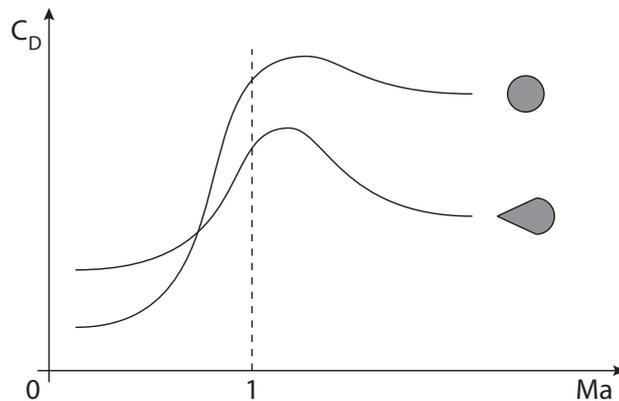


Figura 17: andamento del coefficiente di drag in funzione del numero di Mach per flussi subsonici, transonici e supersonici nel caso di profilo frontale arrotondato e appuntito.

Per valori di $Ma > 1.2$, C_D rimane circa costante (oppure diminuisce o aumenta solo leggermente) per corpi aventi la superficie di monte arrotondata. Per corpi aventi la superficie di monte di forma appuntita, invece, il C_D diminuisce col numero di Mach (Fig. 17), per ragioni complesse legate all'interazione della geometria con le onde di shock. La forma appuntita garantisce, inoltre, che il C_D sia minore in corrispondenza del muro del suono, facilitandone il superamento; al contrario, a basse velocità (zona subsonica), il C_D è maggiore se la forma della superficie frontale è appuntita (favorisce la separazione e, quindi, aumenta il drag di pressione). Questo spiega perché gli aerei con velocità di crociera subsonica (come gli aerei di linea) presentano superfici arrotondate nella parte frontale della fusoliera e delle ali, mentre gli aerei supersonici sono caratterizzati da forme frontali appuntite.

4.2 Lift

Anche nel caso di lift, L , si può utilizzare la terna inerziale (ρ, U, l) per il passaggio alla forma adimensionale. Il gruppo Π associato con il lift quando si usa una terna inerziale è il coefficiente di lift, $C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}$, dove, al

solito, A è un'area caratteristica del corpo e il fattore $1/2$ al denominatore è per ragioni storiche.

Se torniamo a osservare la distribuzione di sforzi tangenziali e pressione (eccesso rispetto all'idrostatica) nel caso di lastra piana perpendicolare al flusso (Fig. 10), notiamo che la forza di lift è nulla poiché la distribuzione degli sforzi è simmetrica rispetto all'asse x . Quest'osservazione vale, in generale, ogni volta che il corpo possiede un asse di simmetria parallelo alla direzione del flusso e il campo di moto è simmetrico rispetto allo stesso asse. Quando il corpo e/o il campo di moto non sono simmetrici rispetto a un asse parallelo al flusso indisturbato, si genera un lift.

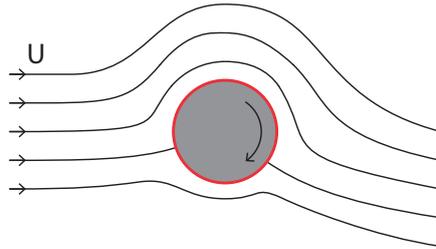


Figura 18: campo di moto nel caso di flusso di Stokes attorno a una sfera soggetta a rotazione (backspin).

Un esempio di lift associato con l'asimmetria del campo di moto senza asimmetria nella forma dell'oggetto è rappresentato in Fig. 18, dove una sfera messa in rotazione in senso orario lungo un asse parallelo all'asse z è investita da una corrente uniforme di flusso nel caso $Re < 1$ (in assenza di separazione). La rotazione della sfera, per via della condizione di no slip, induce asimmetria nel campo di moto rispetto alla situazione a rotazione nulla descritta nel paragrafo precedente. I punti di stagnazione a monte e a valle si spostano verso il basso. In questo caso, si può intuire che, sovrapponendo il moto rotatorio orario attorno alla sfera al moto traslatorio verso destra, le velocità nella zona superiore della sfera saranno maggiori (dove i versi sono concordi) di quelle nella zona inferiore (dove i versi sono discordi). Per via del teorema di Bernoulli, a velocità maggiori corrispondono pressioni minori, per cui la pressione sarà maggiore sulla superficie inferiore della sfera e il lift sarà diretto verso l'alto (positivo). Quello che abbiamo appena descritto viene chiamato **effetto Magnus** [10] e, nel caso di Fig. 18, con asse y coincidente con la verticale geodetica, si parla di **backspin** (se la sfera

ruotasse in senso anti-orario si parlerebbe di **topspin**). Tali effetti, e quello del tutto analogo di **sidespin** associato con una rotazione ad asse parallelo alla verticale geodetica, sono ampiamente sfruttati in ambito sportivo (calcio, baseball, tennis, ping-pong,...). In questo ambito, le fossette presenti sulla superficie delle palle da golf servono non solo a ridurre il drag, come già detto, ma anche ad aumentare l'effetto Magnus (il backspin impresso alla pallina consente alla stessa di contro-bilanciare, parzialmente, la forza di gravità, aumentando la gittata).

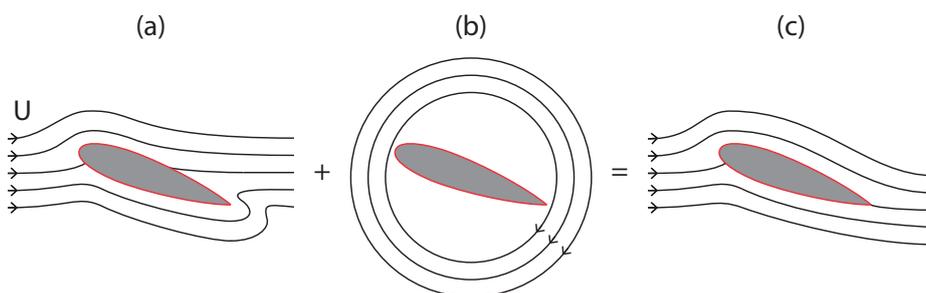


Figura 19: (sovrapposizione del (a) campo di moto di un flusso uniforme che investe un profilo alare con angolo di attacco positivo e di (b) un moto circolatorio, nel caso di fluido ideale. Il risultato è (c) un campo di moto fisicamente congruente con quello di un fluido reale.

Il lift generato dall'asimmetria della forma del corpo è quasi sempre essenzialmente dovuto alla distribuzione delle pressioni (fanno eccezioni i casi di flusso di Stokes): la forma stessa dell'oggetto è il principale parametro di controllo (la dipendenza dal numero di Reynolds e dalla scabrezza relativa è spesso trascurabile, mentre la dipendenza dal numero di Mach diventa importante solo per flussi transonici e supersonici). Spesso, è possibile calcolare il lift rimanendo nello schema di fluido ideale. Consideriamo il caso in cui il profilo alare del Par. 4.1.1 presenta un angolo di attacco (angolo compreso tra la corda e l'asse x) non nullo (positivo). Se si risolvono le equazioni di Eulero, si ottengono le linee di corrente di Fig. 19a, che presentano un andamento chiaramente non fisico in prossimità del bordo di uscita, e una distribuzione di pressione tale da dare zero lift. Se, però, al campo di moto di Fig. 19a si sovrappone un moto circolatorio (Fig. 19b), si ottengono le linee di corrente di Fig. 19c, congruenti con la realtà. L'effetto dell'aggiunta del moto circolatorio è, anche, quello di generare un lift positivo sul profilo alare, come nel caso dell'effetto Magnus. La dimostrazione dell'esistenza di una forza di lift associata con la circolazione del flusso attorno a un profilo alare (dimostrazione che implica anche una mappatura del profilo alare sulla superficie di un cilindro) prende il nome di **teorema di Kutta-Joukowski** [11, 12]. La presenza di un moto circolatorio sovrapposto al moto traslatorio, che può apparire come una forzatura per rendere le linee di corrente

più verosimili, ha, invece, solide basi fisiche e matematiche, legate all'interazione della forma del profilo (compresa la presenza di uno spigolo vivo in corrispondenza del bordo di uscita) con il flusso.

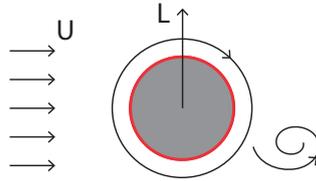


Figura 20: distacco di vortice a valle della sfera nel caso di scia di Kármán e conseguente generazione di lift.



Figura 21: elemento a spirale posto sulla superficie di una ciminiera per la distruzione della coerenza nel distacco dei vortici nel caso di scia di Kármán.

Accenniamo, infine, alla forza di lift associata con la formazione della scia di Kármán. I vortici che, nella zona di valle, si staccano dal corpo in corrispondenza del quadrante superiore ruotano in senso orario, mentre quelli che si staccano nel quadrante inferiore ruotano in senso anti-orario (Fig. 11c). Ogni volta che si forma uno di questi vortici, si genera un moto circolatorio avente verso di rotazione opposto attorno al corpo (Fig. 20). Per effetto Magnus, allora, il corpo è soggetto ad una forza di lift, a media nulla, che cambia segno con una certa frequenza ω (che coincide con la frequenza di distacco dei vortici). Il gruppo Π associato con la frequenza di distacco dei vortici è il numero di Strouhal, che, nel caso della sfera, si scrive $St =$

$\omega d/U$, e che cresce al crescere del numero di Reynolds. Se tale frequenza è prossima a quella naturale di vibrazione della struttura, possono innescarsi fenomeni di risonanza con annessi rischi di danneggiamento (specialmente nel caso di strutture snelle come ciminiere, antenne, condotte sottomarine, cavi, ecc.). Per limitare tale rischio, spesso si posizionano speciali appendici aerodinamiche a forma di pinna a valle del corpo (se si conosce la direzione del flusso che investe la struttura) o si ricopre il corpo con elementi a spirale (se la direzione del flusso rispetto al corpo può variare) (Fig. 21). In entrambi i casi, l'idea è quella di distruggere la coerenza e l'interazione tra i vortici contro-rotanti e, quindi, la concentrazione della sollecitazione nell'intorno di una particolare frequenza.

4.3 Modellazione fisica

Accenniamo ora ai problemi che si incontrano quando si vuole determinare, per esempio, la forza di drag che un flusso esercita su un oggetto a scala reale (prototipo) mediante sperimentazione su modello.

Progettare un modello significa identificare i valori delle variabili di controllo (forma', l' , ρ' , μ' , ϵ' , U' , \mathcal{R}') che compaiono nell'Eq.(18), una volta noti i corrispondenti valori (forma, l , ρ , μ , ϵ , U , \mathcal{R}) del prototipo (significa, in altri termini, definire le scale del problema). Sappiamo già (Cap. 6, Par. 3.1) che solo tre scale dimensionali del problema possono essere fissate in maniera arbitraria. Tutte le altre scale sono univocamente determinate se si vuole garantire la condizione sufficiente del teorema II (uguaglianza dei gruppi II associati con le variabili di controllo nel modello e nel prototipo), cioè la similitudine completa tra modello e prototipo: dall'Eq.(19), forma' = forma, $Re' = Re$, $Ma' = Ma$ e $\frac{\mathcal{R}'}{l'} = \frac{\mathcal{R}}{l}$.

Quando si realizza un modello, si fissa di solito la scala geometrica $\lambda = l'/l$ (per ragioni legate alle dimensioni dell'apparato in cui effettuare la sperimentazione) e si sceglie il fluido da utilizzare, cioè si fissano le scale della densità, $\lambda_\rho = \rho'/\rho$, della viscosità, $\lambda_\mu = \mu'/\mu$, e della comprimibilità, $\lambda_\epsilon = \epsilon'/\epsilon$. Così facendo, però, si scelgono 4 scale, anziché 3: non sarà possibile, allora, garantire la similitudine completa tra modello e prototipo. Se, ad esempio, ci concentriamo sulla determinazione della velocità del flusso nel modello U' , notiamo che: (i) per avere uguaglianza (similitudine) nel numero di Reynolds, deve risultare $\frac{\rho'U'l'}{\mu'} = \frac{\rho Ul}{\mu}$, o, riarrangiando, $U' = U \frac{\lambda_\mu}{\lambda\lambda_\rho}$; (ii) per avere uguaglianza (similitudine) nel numero di Mach, deve risultare $\frac{U'}{\sqrt{\epsilon'/\rho'}} = \frac{U}{\sqrt{\epsilon/\rho}}$, o, riarrangiando, $U' = U \frac{\lambda_\epsilon^{1/2}}{\lambda_\rho^{1/2}}$. Le due condizioni sono chiaramente incompatibili, visto che non è possibile, in generale, variare a piacimento le proprietà dei fluidi. La scelta di rispettare l'una o l'altra similitudine, accettando distorsioni in uno dei gruppi II, dipende dalla pre-

senza di eventuali autosimilarità. In realtà, mentre la viscosità dipende debolmente dalla pressione, la densità, specialmente nei gas, dipende sensibilmente da essa: si può sfruttare questo fatto per agire sulla scala della densità senza variare quella della viscosità (si fa nelle **gallerie del vento pressurizzate**). Occorre però notare che, variando la pressione varia anche la comprimibilità nei gas (Cap. 1, Par. 2.3) e, quindi, la scala ad essa associata.

5 Altri tipi di interazione

Finora abbiamo considerato le componenti della forza che il flusso esercita su un corpo immerso dovute alle distribuzioni di sforzi tangenziali viscosi ed eccesso di pressione rispetto all'idrostatica. Tali distribuzioni di sforzi possono, evidentemente, anche generare dei momenti sul corpo, se il campo di moto non è simmetrico. Anche per calcolare il momento si può ricorrere alla soluzione numerica delle equazioni o agli esperimenti. In entrambi i casi, si è soliti adimensionalizzare il momento usando la terna inerziale, ottenendo il coefficiente di momento.

Al di là dei momenti, il flusso può esercitare sul corpo immerso tipologie di forze distinte da drag e lift.

Abbiamo già detto che la risultante della componente idrostatica delle pressioni fornisce la forza di galleggiamento.

Nel caso di moto non stazionario, il flusso esercita sul corpo una forza proporzionale alla sua accelerazione. Essendo proporzionale all'accelerazione, così come l'inerzia, dal punto di vista del corpo è come se una **massa virtuale** di fluido dovesse essere spostata per consentire al corpo di muoversi: per tale motivo si parla di **effetto di massa aggiunta** [13].

In caso di moto non stazionario, esiste anche un'altra forza associata con il ritardo con cui lo strato limite si adatta ai cambiamenti di velocità relativa tra corpo e flusso. Tale forza tiene conto della **storia** precedente dell'interazione tra il corpo e il flusso ed è nota come **forza di Basset** (dal nome dell'autore [14] che l'aveva studiata, quasi in contemporanea con Boussinesq [15], nel caso di flusso di Stokes).

Riferimenti bibliografici

- [1] Prandtl, L., *Verhandlungen des III Int. Math. Kongr., Heidelberg*, Teubner, Leipzig (1905).
- [2] D'Alembert, J.B. Le Rond, *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, Paris (1752).
- [3] Blasius, H., *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Z. Angew. Math. Phys., 56, 1-37 (1908).
- [4] Schlichting H., *Boundary Layer Theory*, 8th Ed., McGraw-Hill, New York (2000).
- [5] Kármán, T. von, *Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt*, Nachr. Wiss. Ges. Göttingen, 509-517 (1911).
- [6] Morrison, F.A., *An Introduction to Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, New York (2013).
- [7] Achenbach, E., *Experiments on the flow past spheres at very high Reynolds numbers*, J. Fluid Mech., 54, 565 (1972)
- [8] Achenbach, E., *The effects of surface roughness and tunnel blockage on the flow past spheres*, J. Fluid Mech., 65, 113 (1974).
- [9] Glauert, H., *The Effect of Compressibility on the Lift of an Aerofoil*, Proc. Roy. Soc. London, 143, 113-119 (1928).
- [10] Magnus, G., *Über die Abweichung der Geschosse, und: Über eine abfallende Erscheinung bei rotierenden Körpern (On the deviation of projectiles, and: On a sinking phenomenon among rotating bodies)*, Annalen der Physik, 164(1), 1-29 (1853).
- [11] Kutta, M.W., *Auftriebeskräfte in strömenden Flüssigkeiten*, Illustrierte aeronautische Mitteilungen, 133-135 (1902).
- [12] Joukowski, N.I. *On the adjunct vortices*, Obshchestvo ljubitelei estestvoznaniia, antropologii i etnografii, Transactions of the Physical Section XIII, 12-25 (1905).
- [13] Bessel, F.W. *Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels*, Abh. Berlin Akad. aus den Jahre 1826 (1828).
- [14] Basset, A.B., *Treatise on hydrodynamics*, Cambridge (1888).

- [15] Boussinesq, J.V., *Sur la résistance qu'oppose un fluide indéfini au repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide qu'il mouille sur toute sa surface, quand les vitesses restent bien continues et assez faibles pour que leurs carrés et produits soient négligeables*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 100, 935-937 (1885).